



* المعادلة التفاضلية التامة :

- نعلم أن التفاضل التام يعطى :

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

إذا جعلنا التفاضل التام صفرًا فنحصل على المعادلة :

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0 \quad [1]$$

هذه المعادلة تسمى بالمعادلة التفاضلية التامة وحلها :

$$df(x, y) = 0 \Rightarrow f(x, y) = c$$

أما في حال أعطيت المعادلة التفاضلية بالصيغة

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad [2]$$

بالمقارنة بين [1] و [2] نجد :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y) \quad [3] \quad [4]$$





لا يجادل الحل العام للمعادلة [2] نفرض أن الحل العام هو

$$f(x, y) = \int M(x, y) dx + \phi(y) \quad [5]$$

نشتق التابع [5] جزئياً بالنسبة لـ (y) فنحصل على :

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx + \phi'(y) = N(x, y)$$

$$\phi'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx$$

نكامل فنجد :

$$\phi(y) = \int N(x, y) dy - \int \left[\frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right] dy$$

نفرض في [5] فيكون الحل العام :

$$f(x, y) = \int M(x, y) dx + \int N(x, y) dy$$

$$- \int \left[\frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \right] dy$$

مثال حل المعادلة التفاضلية التالية

$$(6x^2 + 4xy + y^2)dx + (2x^2 + 2xy - 3y^2)dy = 0$$

(الكل) لمعرفة الحل ما هو الشرط لكي تكون المعادلة التفاضلية تامة :
 لايجاد الشرط الذي لكي تكون المعادلة التفاضلية تامة نستق [3]
 بالنسبة لـ (y) ونشتق [4] بالنسبة لـ (x) :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} \quad : \quad \text{إذا كان } M \text{ و } N \text{ مستمرين عند } z :$$

6 يبدأ حل المثال السابق من هنا :

$$M(x, y) = 6x^2 + 4xy + y^2 \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 4x + 2y$$

$$N(x, y) = 2x^2 + 2xy - 3y^2 \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 4x + 2y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

فالمعادلة تامة ولتجد الحل العام :

$$f(x, y) = \int M(x, y) dx + \varphi(y) = 2x^3 + 2x^2y + xy^2 + \varphi(y)$$

نشتق جزئياً بالنسبة لـ (y) :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + 2xy + \varphi'(y) \Rightarrow 2x^2 + 2xy - 3y^2$$

$$\varphi'(y) = -3y^2 \Rightarrow \varphi(y) = -y^3 + c$$

و بالتالي :

$$f(x, y) = 2x^3 + 2x^2y + xy^2 - y^3 = c$$

حيث $\boxed{\frac{M_y - N_x}{N} = p(x)}$ فيكون لدينا :

$$\ln \mu = \int p(x) dx \Rightarrow \mu(x) = e^{\int p(x) dx}$$

[2] إذا كان $\mu_y = \frac{d\mu}{dy}$ ، $0 = \mu_x \Leftrightarrow \mu(x, y) = \mu(y)$

$$\boxed{\mu(y) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{-M} dy}}$$

بالقورين في * فيكون :

مثال حل المعادلة التفاضلية $y(2x+y)dx + (3x^2 + 4xy - y)dy = 0$ الحل:

$$M(x, y) = y(2x+y) \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2x + 2y$$

$$N(x, y) = 3x^2 + 4xy - y \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 6x + 4y$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

فهو غير تام.

في دعاء التكميل :

$$\boxed{\mu(y) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{-M} dy}}$$

$$M_y - N_x = 2x + 2y - 6x - 4y = 4x - 2y$$

$$\frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{-(4x + 2y)}{-(2x + y)y} = \frac{2(2x + y)}{(2x + y)y} = \frac{2}{y}$$

$$\mu(y) = e^{\int \frac{2}{y} dy} = y^2$$



نضرب طرفي المعادلة بمعامل التكامل $M(y)$:

$$y^2(2x+y)dx + (3x^2+4xy-y)y^2dy = 0$$

$M(x,y)$

$N(x,y)$

لا خيار الحل العام:

$$f(x,y) = \int (2xy^3 - y^4) dx + \phi(y)$$

$$= x^2y^3 + xy^4 + \phi(y)$$

نشتق جزئياً بالنسبة لـ y فيكون:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3x^2y^2 + 4xy^3 + \phi'(y) = 3x^2y^2 + 4xy^3 - y^3$$

$$\Rightarrow \phi'(y) = -y^3 \Rightarrow \phi(y) = -\frac{1}{4}y^4 + C$$

$$\boxed{x^2y^3 + xy^4 - \frac{y^4}{4} = C_1} \quad \leftarrow f(x,y) \quad \text{نضعه في:}$$

وهذا الحل العام للمعادلة المطلوبة.

(مثال) أوجد الحل العام للمعادلة:

$$(3x^2+2y)dx + (2x \ln 3x + \frac{3x}{y})dy = 0$$

$$M(x,y) = 3x^2+2y \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 2$$

الحل:

$$N(x,y) = 2x \ln 3x + \frac{3x}{y} \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 2 \ln 3x + \frac{2}{3x} + 2x + \frac{3}{y}$$

فهو معادلة تفاضلية غير تامة $\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$

عدد عامل التكامل $M_y - N_x = -(2 \ln 3x + \frac{3}{y})$

$$\frac{M_y - N_x}{N} = -\frac{1}{x} = P(x)$$

$$\mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dy} = e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

نضرب طرفي المعادلة بـ $\mu = \frac{1}{x}$ فينتج معادلة تامة .

VIVA RBCs

ولا حظ: إذا كانت لدينا معادلة تفاضلية غير تامة ~~لكن~~ ونريد تحويلها إلى معادلة تفاضلية تامة فإننا نضرب عامل التكامل ولنا حريّة الاختيار بالضرب بـ

$$\boxed{M(x) = e^{\int P(x) dx}} \quad \text{أو} \quad \boxed{M(y) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{-M} dy}}$$

حيث $P(x) = \frac{M_y - N_x}{N}$